کد اجرا: نامشخص | تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۱۱

نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۱۷۲ دقیقه

نام آزمون: نمونه سوالات نهایی سال های اخیر نظریه اعداد

آموزشگاه پرسا

۱) ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲) باقی‌مانده تقسیم عدد $!۲۰۰ + \cdots + !۵ + !۴ + !۳ + !۲ + !۱$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۳) رقم یکان عدد $(۷ + ۲^{۱۱})$ را به‌دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۴) فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲, ۳۵a]$ را به‌دست آورید.

۵) اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۶) باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را به‌دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۷) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۸) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۶۳^{۱۴} + ۱$ را بر ۱۶ به دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۹) برای هر دو عدد حقیقی x و y، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$۲x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴x - ۴$$

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۱۰) معادله سیاله $۶x + ۷y = ۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۱۱) اگر a و b عددی صحیح و فرد باشند، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۵)$ را بر ۸ بیابید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۱۲) معادله همنهشتی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن را به دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۳) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۱۴) به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۵) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲a - ۵b)$ بر ۱۷ را بیابید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۶) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۷) ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵ \ (k \in \mathbb{W}),$ نوشته می‌شود.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۸) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۲a + ۳$ بر ۸ را به‌دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۹) ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۰) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به‌ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۳۰ بیابید.

۲۱) با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۲) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۳) اگر باقیماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به‌ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به‌دست آورید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۴) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۵) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۶) درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارد که رابطهٔ $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشد.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۷) جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$، آن‌گاه عدد .... شمارندهٔ عدد .... است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با .... است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۸) جاهای خالی را پر کنید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

الف) $[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

$1)\ a|c\ ,\ b|c \qquad 2)\ \forall m>0, \cdots\cdots\cdots\cdots$

۲۹) معادلهٔ هم‌نهشتی $1402x \overset{9}{\equiv} 11$ را حل کنید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۰) در معادلهٔ سیاله $15x+19y=7$، بزرگ‌ترین عدد ۲رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت، چه مقداری است؟ (با راه‌حل)

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۱) باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به‌ترتیب برابر ۳ و ۴ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه‌حل)

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۲) اگر $a|2m+3$ و $a|m+7$، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۳) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2+y^2+1 \geq 2xy - z^2$

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۴) اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۵) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۶) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2+1 \geq -2x(y+x+1)$»

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۷) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=27^{20}+18$ را بر ۱۳ بیابید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۸) اگر عددی مانند k در Z باشد، به‌طوری که $5|4k+1$، ثابت کنید $25|16k^2+28k+6$.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۹) دانش‌آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سوالات ۵امتیازی و ۳امتیازی پاسخ داده و مجموعا ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد.)

این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۴۰) ثابت کنید باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیماندهٔ تقسیمِ مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۴۱) اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به‌ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۴۲) اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(5k+9)$ و $(8k+13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a=1$ یا $a=7$.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۴۳) a_1، a_2، a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1، b_2، b_3 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند.

ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۴۴ معادله سیاله $۵x+۲y=۱۸$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۵ اگر دو عدد $(۳a-۵)$ و $(۴a-۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۹a+۶)$ را به‌دست آورید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۶ اگر $a>۱$، $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۷ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۸ معادلهٔ $۷x\overset{۴}{\equiv}۱$ را حل کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۹ فرض کنیم $a,b\in\mathbb{Z}\ ,m\in\mathbb{N}$ اگر $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۰ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که $a|۳n+۴$ و $a|۲n+۳$. نشان دهید $a=۱$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۱ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۲ معادلهٔ هم‌نهشتی $۵x\overset{۱۱}{\equiv}۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۳ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x+۱۳y=۷$ را به‌دست آورید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۴ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵۵ گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ب برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

پ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b)|m$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۵۶ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف اگر $a|b$ و n و m دو عدد طبیعی باشند که $m\leq n$، آنگاه $a^m|b^n$ مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ب اگر $a|b$ آنگاه $(a,b)=a$ مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

پ اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ باشد، آنگاه باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ت منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیدا کردن همهٔ جواب‌های حقیقی است که در معادله $ax\overset{m}{\equiv}b$ صدق می‌کند. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۵۷ هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

الف برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n+۱$ اول است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

ب مربع هر عدد فرد، عددی فرد است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۵۸ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

الف اگر $a|b$ و $b\neq ۰$، در این صورت $|a|>|b|$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

ب برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a|c,b|c)$ و $(\forall m>۰,a|m,b|m\Rightarrow c\leq m)$، آن‌گاه $[a,b]=c$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

پ برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a\overset{m}{\equiv}r$. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

ت بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و -۲ برابر -۲ است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۵۹ در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

الف حاصل $([m^۲\ ,\ m]\ ,\ m^۵)$ برابر با .... است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ب اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a\ ,\ b)=۱$ می‌گوییم a و b .... هستند. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۶۰ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

الف حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ب برای اعداد صحیح a، b و c که $a \neq 0$، اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

پ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ت اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ آنگاه می‌گوییم؛ a و b نسبت به هم اول‌اند.

مرجع: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

پاسخ‌نامه تشریحی

۱
باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$p = 4k\ (1)\ ,\ p = 4k+1\ (2)\ ,\ p = 4k+2\ (3)\ ,\ p = 4k+3\ (4)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

۲ می‌دانیم $1! \overset{15}{\equiv} 1$ و $2! \overset{15}{\equiv} 2$ و $3! \overset{15}{\equiv} 6$ و $4! \overset{15}{\equiv} 9$ و $5! \overset{15}{\equiv} 0$ و ... و $200! \overset{15}{\equiv} 0$ پس داریم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + 200! \overset{15}{\equiv} 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \cdots + 0 \overset{15}{\equiv} 3$$

۳

$$2^5 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 2^{10} \overset{10}{\equiv} 2^2 \xrightarrow{\times 2} 2^{11} \overset{10}{\equiv} 8 \Rightarrow 2^{11} + 7 \overset{10}{\equiv} 15 \overset{10}{\equiv} 5$$

رقم یکان برابر ۵ است.

۴

$$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2\ ,\ B = 35a^2 = 5 \times 7 \times a^2 \Rightarrow [A, B] = 105a^2$$

۵

$$\left.\begin{array}{l} m = 17q + 5\ \ (q \in \mathbb{Z}) \\ n = 17q' + 3\ \ (q' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right\} \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5 \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$$

۶

$$7^2 = 49 \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow 7^4 \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{28} \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7^2 \overset{15}{\equiv} 4} 7^{30} \overset{15}{\equiv} 4$$

۷ اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۸

$$63 \overset{16}{\equiv} -1 \Rightarrow 63^{14} \overset{16}{\equiv} 1 \Rightarrow A \overset{16}{\equiv} 2 \Rightarrow r = 2$$

۹

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

۱۰

$$6x \overset{7}{\equiv} 185 = 23 \times 7 + 24 \Rightarrow 6x \overset{7}{\equiv} 24 \xrightarrow{(6\ ,\ 7)=1} x \overset{7}{\equiv} 4$$
$$\Rightarrow x = 7k + 4 \Rightarrow 6(7k + 4) + 7y = 185 \Rightarrow y = -6k + 23$$

۱۱ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $8k + 1$ است. $(k \in Z)$ پس داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{array}\right. \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7$$

۱۲ چون $(12, 8) | 20$ معادله جواب دارد.

$$4x \overset{6}{\equiv} 10 \rightarrow 4x \overset{6}{\equiv} 4 \rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \rightarrow x = 3k + 1$$

۱۳

$$1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} (-1)^{25} \times 9 + 11 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r = 2$$

۱۴

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

گزاره همواره درست است.

۱۵

$$\left.\begin{array}{l} a = 17q + 5 \\ b = 17q' + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(12q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$$

۱۶ از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-\beta=m\in Q\\ \alpha+\beta=n\in Q\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\alpha=m+n\Rightarrow \alpha=\frac{m+n}{۲}\Rightarrow \alpha\in Q\ (\text{تناقض با فرض})$$

۱۷ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p=۶k\ \ (۱)\quad ,\quad p=۶k+۱\ \ (۲)\quad ,\quad p=۶k+۲=۲(۳k+۱)\ \ (۳)$$

$$p=۶k+۳=۳(۲k+۱)\ \ (۴)\quad ,\quad p=۶k+۴=۲(۳k+۲)\ \ (۵)\quad ,\quad p=۶k+۵\ \ (۶)$$

p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

۱۸

$$a=۴q+۳\Rightarrow ۲a+۳=۸q+۹=۸(\underbrace{q+۱}_{q'})+۱=۸q'+۱\Rightarrow r=۱$$

۱۹

$$a\equiv b\Rightarrow m|a-b\Rightarrow m|c(a-b)\Rightarrow m|ac-bc\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

۲۰ بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases}a=۵q+۲\\ a=۶q'+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶a=۳۰q+۱۲\\ ۵a=۳۰q'+۱۵\end{cases}\Rightarrow a=۳۰q''-۳$$

$$\Rightarrow a=۳۰r+۲۷$$

۲۱

$$۲y\overset{۵}{\equiv}۱۸\xrightarrow{(۲,۵)=۱}y\overset{۵}{\equiv}۹\Rightarrow y\overset{۵}{\equiv}۹\overset{۵}{\equiv}۴$$

$$y=۵k+۴\quad \text{و}\quad ۵x+۲y=۱۸\to ۵x=۱۸-۲(۵k+۴)\to x=-۲k+۲\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

۲۲ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصلهٔ اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱\to ۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۲۳

$$\left.\begin{array}{l}m=۱۳q_۱+۲\xrightarrow{\times ۳}۳m=۱۳(۳q_۱)+۶\\ n=۱۳q_۲+۹\xrightarrow{\times ۵}۵n=۱۳(۵q_۲)+۴۵\end{array}\right\}\to ۵n-۳m=۱۳q'+۳۹\to ۵n-۳m=۱۳q''+۰\to r=۰$$

۲۴ برای عدد صحیح و دلخواه a یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a=۳k$ آنگاه $۳|a$.

(۲) اگر $a=۳k+۱$ آنگاه $۳|a+۲$.

(۳) اگر $a=۳k+۲$ آنگاه $۳|a+۴$.

۲۵

الف درست

$$k=n(n+۱)\Rightarrow k=n^۲+n\Rightarrow ۴k=۴n^۲+۴n\Rightarrow ۴k+۱=۴n^۲+۴n+۱\Rightarrow ۴k+۱=(۲n+۱)^۲$$

ب درست

فرض کنیم $(a,a+۱)=d\ ,\ a\in\mathbb{Z}$ درنتیجه داریم:

$$\begin{array}{l}d|a\\ d|a+۱\end{array}\longrightarrow d|(a+۱)-a\longrightarrow d|۱\xrightarrow{d>۰}d=۱$$

۲۶

الف درست

ب نادرست (برای مثال $x=۰$ و $y=۲$ را در نظر بگیرید.)

۲۷

الف عدد a شمارندهٔ عدد b است.

ب $۲m$

۲۸

الف

$\forall m > ۰ \,,\, a|m \,,\, b|m \Rightarrow c \leq m$

۲۹

$$(۱+۴+۰+۲)x \overset{۹}{\equiv} ۱+۱ \Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} -۷$$

$$\overset{(۷,۹)=۱}{\Rightarrow} x \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow x = ۹k-۱ \text{ یا } x = ۹k+۸$$

۳۰

$$۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \to ۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۴۵ \xrightarrow{(۱۵,۱۹)=۱} x \overset{۱۹}{\equiv} ۳$$

$$\to x = ۱۹k+۳ \xrightarrow{k=۵} x = ۹۸$$

۳۱

$$\begin{cases} a = ۵q_۱ + ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴a = ۲۰q_۱ + ۱۶ \\ a = ۴q_۲ + ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۲۰q_۲ + ۱۵ \\ \qquad\qquad \xrightarrow{-} a = ۲۰q' - ۱ \to a = ۲۰q^n + ۱۹ \end{cases}$$

۳۲

$$\begin{cases} a|۲m+۳ \\ a|m+۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} a|۲m+۳ \\ a|۲m+۱۴ \end{cases} \to a|۱۱ \to a = ۱ \,,\, a = ۱۱$$

۳۳

$x^۲ + y^۲ + ۱ \geq ۲xy - z^۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy + z^۲ + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲ + z^۲ + ۱ \geq ۰$ همواره بدیهی است

۳۴

$$a = bq + r \,,\, ۰ \leq r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a-bq \Rightarrow n|r$$

۳۵ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) \in Q$. یعنی $۲\alpha \in Q$؛ در نتیجه $\alpha \in Q$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۳۶

$$y^۲ + ۱ \geq -۲x(y+x+۱) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy + x^۲ + ۲x + ۱ \geq ۰$$

$\Leftrightarrow (x+۱)^۲ + (x+y)^۲ \geq ۰ \Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

۳۷

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \quad , \quad ۱۸ = ۱۳ \times ۱ + ۵ \quad , \quad ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۵ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰} + ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۵ \Rightarrow r = ۶$$

۳۸

$$\begin{matrix} ۵|۴k+۱ \Rightarrow ۲۵|۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \\ ۵|۴k+۱ \Rightarrow ۲۵|۲۰k + ۵ \end{matrix} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

۳۹

$$۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۳k \Rightarrow ۵(۳k) + ۳y = ۴۲ \Rightarrow y = -۵k + ۱۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}$$

۴۰ عدد nرقمی $A = a_{n-۱}a_{n-۲}\cdots a_۰$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$A = ۱۰^{n-۱} \times a_{n-۱} + \cdots + \cdots + \cdots + ۱۰^۲ a_۲ + ۱۰a_۱ + ۱a_۰ \Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} ۱ \times a_{n-۱} + \cdots + ۱ \times a_۱ + a_۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} a_{n-۱} + \cdots + a_۱ + a_۰$$

۴۱

$$\begin{matrix} a = ۶q + ۳ \\ a = ۷q' + ۵ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۷a = ۴۲q + ۲۱ \\ ۶a = ۴۲q' + ۳۰ \end{matrix} \Rightarrow a = ۴۲(q - q' - ۱) + ۳۳ \Rightarrow r = ۳۳$$

۴۲

$$\begin{cases} a|۵k+۹ \\ a|۸k+۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a|۴۰k+۷۲ \\ a|۴۰k+۶۵ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \Rightarrow a = ۱ \vee a = ۷$$

۴۳ اگر $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ زوج نباشند (فرض خلف)، پس عددی فرد است،

پس هر سه عامل $(a_۱ - b_۱)$ و $(a_۲ - b_۲)$ و $(a_۳ - b_۳)$ هم باید فرد باشند،

در نتیجه مجموع آنها باید فرد باشد،

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است،

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۴۴

$$۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$$
$$\Rightarrow y = ۵k + ۴ \Rightarrow ۵x + ۲(۵k + ۴) = ۱۸$$
$$\Rightarrow x = -۲k + ۲$$

۴۵

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$
$$\Rightarrow ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$
$$\Rightarrow r = ۴$$

۴۶

$$a|۹(۵k + ۳) - ۵(۹k + ۴) \Rightarrow a|۲۷ - ۲۰$$
$$\Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷ \in P$$

۴۷ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r + x - r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۴۸

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴ \times ۵ + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{(۷,۴)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k + ۳ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۴۹

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|(a - b)(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + \cdots + b^{n-۱}) \Rightarrow m|a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۵۰

$$\begin{matrix} a|۳n + ۴ \\ a|۲n + ۳ \end{matrix} \Rightarrow a| - ۲(۳n + ۴) + ۳(۲n + ۳) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = ۱$$

۵۱

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲ + y^۲}{xy} \geq ۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \geq ۲xy \Leftrightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است.

۵۲

$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

۵۳ معادله سیاله دارای جواب است زیرا $(۹, ۱۳) = ۱|۷$

$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \to ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴ \to y = ۹k + ۴$$

در نتیجه با جایگذاری $y = ۹k + ۴$ در معادلهٔ سیاله $۹x + ۱۳y = ۷$ داریم:

$$x = -۱۳k - ۵$$

۵۴

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a - ۱)^۲ \geq ۰$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

۵۵

الف نادرست

$$n = ۴ \Rightarrow ۲^۴ - ۱ = ۱۵ \notin P$$

ب درست

پ نادرست

۵۶

الف درست

ب نادرست

پ درست.

ت نادرست.

۵۷

الف نادرست، مثال نقض $n = ۳$

ب درست، اثبات:

$$a = ۲k + ۱ \Rightarrow a^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$$

۵۸

الف نادرست

ب درست

پ درست

ت نادرست

۵۹

الف m^{2}

ب نسبت به هم اول

۶۰

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت درست