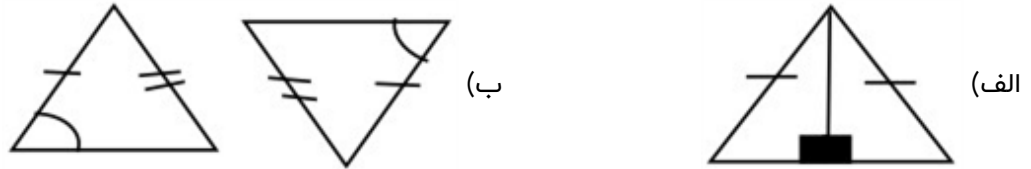
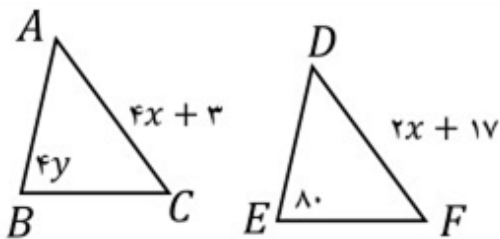


۱ قطر متوازی الاضلاع را رسم کنید. ضلعها و زاویههای مساوی را مشخص کنید و حالت همنهشتی دو مثلث را بنویسید.

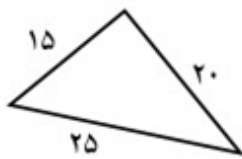
۲ با توجه به اجزای مشخص شده، آیا دو مثلث همنهشت هستند؟ به چه حالتی؟



۳ دو مثلث زیر همنهشت هستند. مقدار x و y را به دست آورید.



۴ آیا مثلث مقابل قائم الزاویه است؟ چرا؟



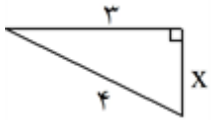
۵ در هر شکل مقدار x را به دست آورید.



۶ دو درخت یکی به ارتفاع ۲۰ متر، دیگری به ارتفاع ۳۰ متر در دو طرف یک جاده به عرض ۵۰ متر روبه روی هم قرار دارند. در انتهای هریک از درختها یک کلاغ نشسته است. طعمه‌ای روی جاده بین دو درخت قرار دارد. دو کلاغ در یک لحظه با دیدن طعمه با سرعت یکسان به طرف طعمه پرواز می‌کنند و با هم به طعمه می‌رسند. معین کنید طعمه در چه فاصله‌ای از درخت بلندتر قرار دارد؟

با توجه به شکل مقابل، مقدار x را حساب کنید.

۷



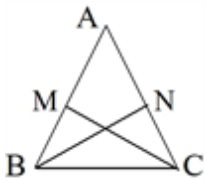
ثابت کنید در مستطیل قطرها مساوی‌اند.

۸



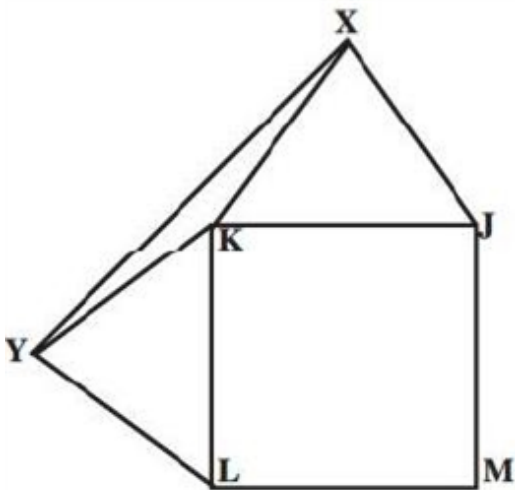
در شکل، CM ، BN نیم‌سازهای زاویه‌های B ، C از مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند. ثابت کنید: $CN = BN$

۹



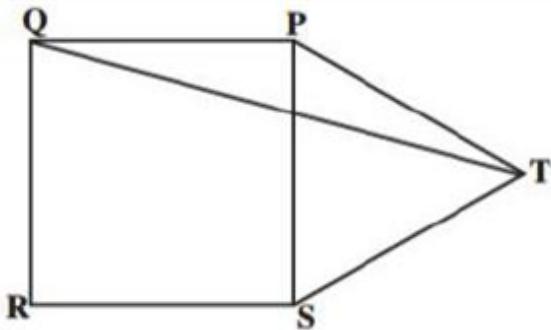
یک مربع $JKLM$ و مثلث‌های JXL و KYL هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY متساوی‌الساقین است.

۱۰

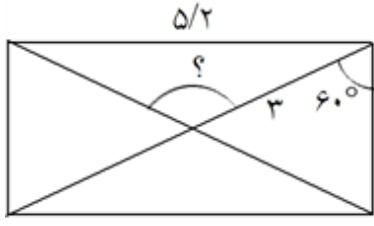


یک مربع $PQRS$ و مثلث متساوی‌الاضلاع PST است. نشان دهید مثلث PQT متساوی‌الساقین است؟

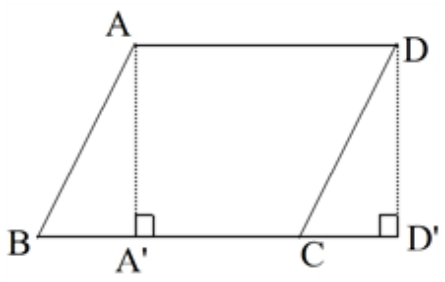
۱۱



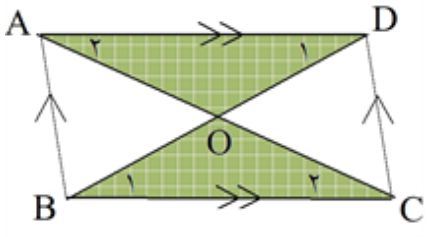
قسمتهایی از شکل که با علامت ؟ مشخص شده‌اند، با استفاده از خاصیت‌های چهارضلعی‌ها و عددهای داده شده پیدا کنید.



در شکل مقابل، ABCD متوازی‌الاضلاع است و $AA' \perp BC$ و $DD' \perp BC$. چرا دو مثلث ABA' و DCD' با هم مساوی‌اند؟

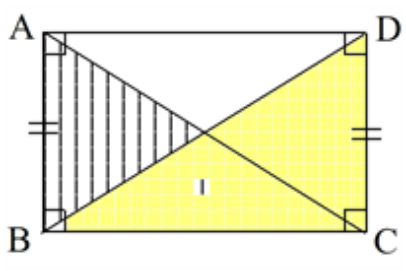


چرا در هر متوازی‌الاضلاع دو قطر یکدیگر را نصف می‌کنند؟

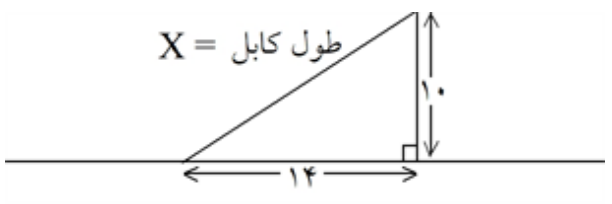


آیا در هر مستطیل، قطرها با هم مساوی‌اند؟ برای پاسخ دادن به این سوال، مستطیل ABCD را در نظر بگیرید. و با تکمیل روابط زیر، دلیل تساوی دو مثلث ABC و BCD را بیان کنید. از تساوی آن‌ها نتیجه بگیرید که $AC = BD$

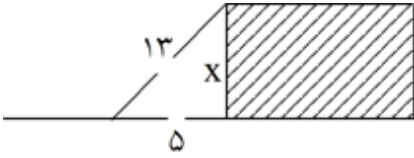
$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ عرض مستطیل} \\ \hat{B} = \\ BC \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta = BDC \Rightarrow \text{است.}$$



یک تیر به ارتفاع ۱۰ متر به طور عمودی در زمین قرار دارد. از نوک تیر آن یک کابل طبق شکل به زمین بسته شده است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول کابل را حساب کنید.



۱۷ با توجه به شکل، مقدار x را حساب کنید.



۱۸ عبارتهای زیر را کامل کنید.

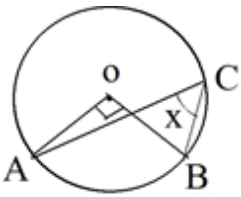
- الف) اگر در مثلثی، مجذور بزرگترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آنگاه آن مثلث..... است.
 ب) اگر یک نیم دایره، حول قطر آن دوران کند، شکل حاصل..... می شود.
 ج) در یک دایره، وترهای نظیر کمانهای..... با هم مساویند.

۱۹ الف) در شکل مقابل زاویه A با کدام زاویه مساوی است؟ چرا؟

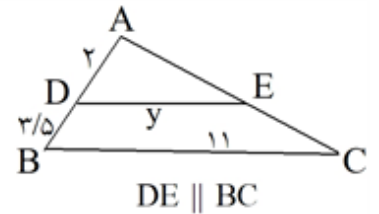
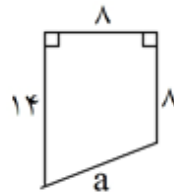
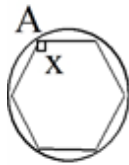
ب) قطر یک مستطیل ۲۶ سانتیمتر و عرض آن ۱۰ سانتیمتر است. طول مستطیل چقدر است؟

۲۰ الف) قطرهای یک لوزی ۲۴ و ۱۰ سانتی متر می باشند، طول هر ضلع لوزی را حساب کنید.

ب) اندازهی زاویه X را به دست آورید. (O مرکز دایره)



۲۱ در هر شکل مقدار مجهول را حساب کنید.



(۳)

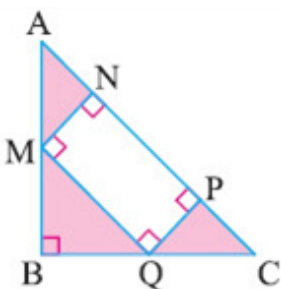
(۲)

(۱)

۲۲ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که اندازهی هر ضلع آن ۶ سانتی متر باشد. (تا یک رقم اعشار)

۲۳ هر ساق مثلث متساوی الساقینی ۲۰ سانتی متر و قاعده آن ۲۴ سانتی متر است. ارتفاع مثلث را به دست آورید.

۲۴ در شکل زیر مثلث متساوی الساقین ABC در رأس B قائمه است. طول و عرض مستطیل $MNPQ$ به ترتیب ۲ و ۱ واحد است. مساحت ناحیهی رنگی چه قدر است؟



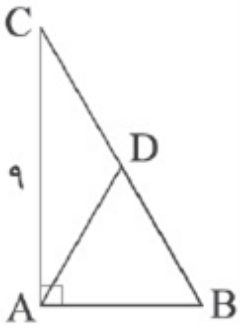
$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۵ در شکل روبه‌رو $\hat{A} = 90^\circ$ و مثلث $\triangle ABD$ متساوی‌الاضلاع است. اگر $\overline{AC} = 9$ باشد، طول وتر BC کدام است؟



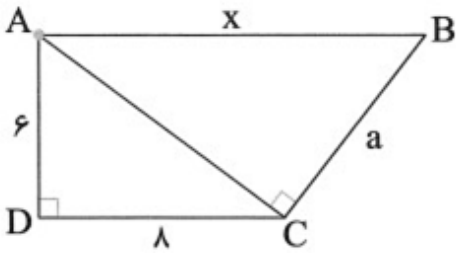
۴ $6\sqrt{3}$

۳ $3\sqrt{3}$

۲ $2\sqrt{3}$

۱ $4\sqrt{3}$

۲۶ با توجه به شکل زیر مقدار x برحسب a کدام است؟



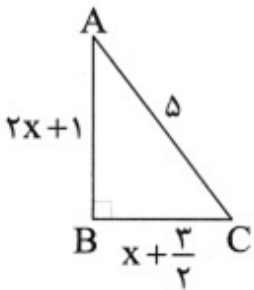
۴ $\sqrt{10+a}$

۳ $\sqrt{10+a^2}$

۲ $\sqrt{100+a^2}$

۱ $\sqrt{100+a}$

۲۷ در شکل زیر اندازه‌ی ضلع AB برابر با کدام است؟



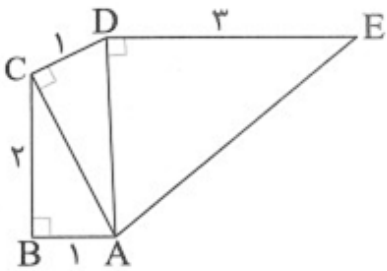
۴ ۳

۳ ۴

۲ $\frac{3}{2}$

۱ ۲

۲۸ در شکل زیر طول ضلع AE برابر با کدام است؟



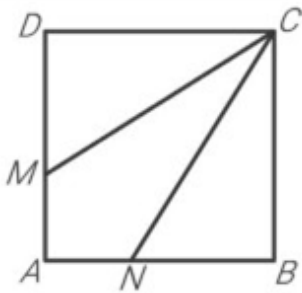
۴ ۱۵

۳ ۱۴

۲ $\sqrt{7}$

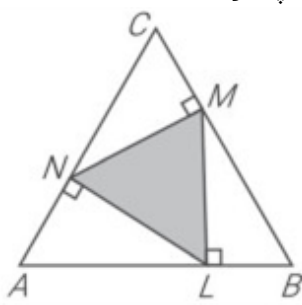
۱ $\sqrt{6}$

طول ضلع مربع ABCD برابر ۳ سانتی‌متر است. نقطه‌های M و N به ترتیب روی AD و AB طوری قرار گرفته‌اند که CM و CN مربع را به سه قسمت هم مساحت تقسیم می‌کنند. طول DM چقدر است؟



- ۱) ۵/۵ سانتی‌متر ۲) ۱ سانتی‌متر ۳) ۱/۵ سانتی‌متر ۴) ۲ سانتی‌متر ۵) ۲/۵ سانتی‌متر

مطابق شکل، نقطه‌های N ، M و L طوری روی ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارند که $ML \perp AB$ ، $NM \perp BC$ و $LN \perp AC$. مساحت مثلث ABC برابر است با ۳۶. مساحت مثلث LMN چقدر است؟



- ۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۱۸



۱ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند:

۲ الف) همنهشت هستند به حالت (وض)

۳ در دو مثلث همنهشت اضلاع و زاویه‌های متناظر برابرند:

ب) همنهشت نیست (چون باید زاویه بین دو ضلع باشد)

$$4x + 3 = 2x + 17$$

$$4x - 2x = 17 - 3$$

$$2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

$$25^2 = 20^2 + 15^2$$

$$625 = 400 + 225 = 625$$

$$625 = 625$$

$$4y = 80$$

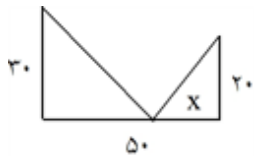
$$y = \frac{80}{4} = 20$$

بله، چون رابطه فیثاغورس در آن صدق می‌کند.

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36 = 100$$

$$x = \sqrt{100} = 10$$



$$x^2 = 13^2 - 5^2$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12$$

$$x^2 + 20^2 = (50 - x)^2 + 30^2$$

$$\cancel{x^2} + 400 = 2500 - 100x + \cancel{x^2} + 900$$

$$100x = 2000 \Rightarrow x = 20$$

$$4^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 16 - 9 = x^2 \Rightarrow 7 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{7} = 2/6$$

۸ دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BDC$ را در نظر می‌گیریم تا شامل قطرها باشد.

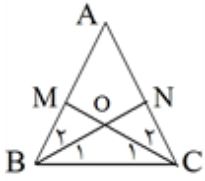
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } BD \\ \text{طول مستطیل } CD = AB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BDC \text{ (ض ز ض)}$$

پس طبق اجزای متناظر: $AD = BC$

نیمساز زاویه‌های مساوی را به قسمت مساوی تقسیم کرده است. $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ ۲. تساوی مثلث‌ها

ضلع مشترک BC

دو زاویه زیر دو ساق $\widehat{B} = \widehat{C}$



به حالت دو زاویه و ضلع بین $\triangle BNC = \triangle BMC \Rightarrow$

طبق اجزای متناظر: $BM = NC$

۱۰ مربع JKLM است، پس KS و KL با هم برابرند و چون دو مثلث XKJ و KYL متساوی‌الاضلاع‌اند و ضلع برابر دارند، مثلث KXY متساوی‌الساقین است با ساق‌های KX و KY.

۱۱ در مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع، اضلاع با هم برابر هستند و چون مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع، ضلع مشترک دارند. دو ضلع PQ و PT در مثلث PQT با هم برابرند، پس مثلث PQT متساوی‌الساقین است.

۱۲ - در مثلث ۱: مثلث متساوی‌الساقین با ساق‌های ۳ سانتی متر دو زاویه ۶۰ درجه دارد و زاویه سوم آن نیز ۶۰ درجه می‌باشد.

$$60 + 60 = 120$$

$$180 - 120 = 60$$

$$? \Rightarrow 180 - 60 = 120$$

- مثلث، متساوی‌الاضلاع است. پس ضلع سوم سوم هم ۳ می‌باشد یعنی:

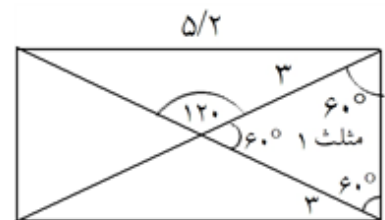
$$? \Rightarrow \text{عرض مستطیل} = 3$$

- با توجه به شکل مشخص است که هر قطر مستطیل برابر ۶ می‌باشد.

فیثاغورس

$$\longrightarrow 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 25$$

$$? \Rightarrow \text{عرض مستطیل} = \sqrt{25} = 5$$



$90^\circ = A' = D'$

$AB \parallel DC$ و BC مورب $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$

$AA' = DD'$ ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ABA' = \triangle DCD'$

خطی که دو خط موازی را قطع می‌کند زاویه‌ی تند برابر می‌سازد.

۱۴

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = B_1 \\ A_2 = C_2 \\ O \text{ زاویه ی متقابل به راس} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAD = \triangle OBC \Rightarrow \begin{cases} OD = OB \\ OA = OC \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \text{ عرض مستطیل} \\ \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \\ BC = \text{مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \widehat{ABC} = \widehat{BDC} \Rightarrow AC = BD$$

۱۵

$$x = \sqrt{100 + 196} = \sqrt{296} \Rightarrow x = \sqrt{296} \approx 17.2$$

۱۶

$$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{12^2} = 12$$

۱۷

(ج) مساوی

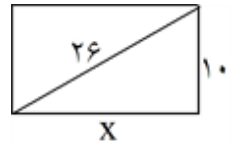
(ب) کره

(الف) قائم الزاویه

۱۸

(الف) ۱۹

$$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ (ب)}$$



$$\frac{10}{2} = 5 \quad \frac{24}{2} = 12 \quad 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow 13 = \text{ضلع}$$

(الف) ۲۰

$$\hat{O} = \hat{AB} = 90^\circ \Rightarrow \hat{X} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

(ب)



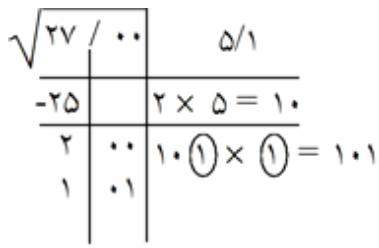
$$(22 + 3/5 = 5/5 \Rightarrow \frac{2}{5/5} = \frac{y}{11} \Rightarrow y = \frac{22}{5/5} \Rightarrow y = 4 \text{ (۱) ۲۱}$$

$$a = \sqrt{(14 - 8)^2 + 8^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$x = \frac{(6 - 2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ \text{ (۳)}$$

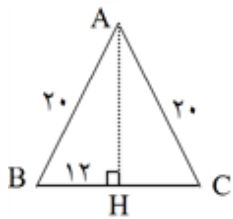
ارتفاع وسط ضلع مقابل $\Rightarrow \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow h^2 = 6^2 - 3^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 9 \Rightarrow$

$h^2 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} \Rightarrow h = \approx 5.1$



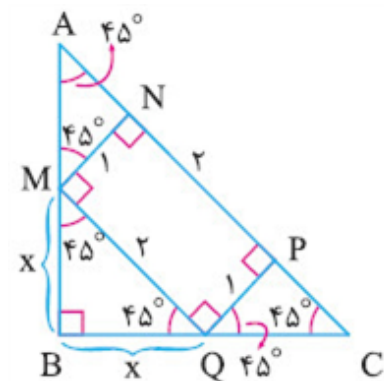
\Rightarrow ارتفاع وسط قاعده $\Rightarrow \frac{24}{2} = 12$

\Rightarrow ارتفاع $= 20^2 - 12^2 \Rightarrow$ ارتفاع $= 400 - 144 \Rightarrow$ ارتفاع $= 256 \Rightarrow$ ارتفاع $= \sqrt{256} \Rightarrow$ ارتفاع $= 16$



$AH^2 + BH^2 = 20^2 \Rightarrow AH^2 = 400 - 144 \Rightarrow AH = \sqrt{256} = 16$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زاویه‌ی تند در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین برابر با 45° می‌باشد.



$\triangle BMQ : x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle BMQ} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 1$

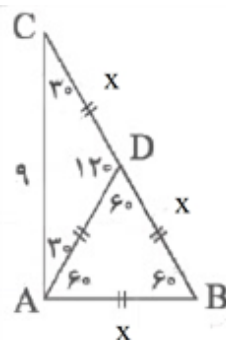
$\triangle AMN : \hat{A} = 45^\circ, \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow \hat{NMA} = 45^\circ \Rightarrow AN = MN$

$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

$\triangle PQC : \hat{C} = 45^\circ, \hat{P} = 90^\circ \Rightarrow \hat{PQC} = 45^\circ \Rightarrow PQ = PC \Rightarrow S_{\triangle PQC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

رنگی $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$

طبق شکل: $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AD} = \overline{CD} = x$



طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + 9^2 = (2x)^2 \Rightarrow x^2 + 9^2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{3} = 27$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2x = 6\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق رابطه‌ی فیثاغورس برای مثلث ADC داریم:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 3^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow AC^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$$

با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$x^2 = a^2 + 10^2 = a^2 + 100 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 + 100}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC، داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 25 = (2x + 1)^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow 25 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 25 - 1 - \frac{9}{4} = 5x^2 + 7x \Rightarrow 21/4 = 5x^2 + 7x$$

با قرار دادن گزینه‌ها به جای AB به جواب می‌رسیم:

$$1) AB = 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$21/4 = 5x^2 + 7x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 21/4 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 21/4 = 4/4 \quad \times$$

$$2) AB = 2x + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$21/4 = 5x^2 + 7x \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} 21/4 = 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 21/4 = 2/0.625 \quad \times$$

$$3) AB = 2x + 1 = 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$21/4 = 5x^2 + 7x \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} 21/4 = 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 21/4 = 21/4 \quad \checkmark$$

$$4) AB = 2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$21/4 = 5x^2 + 7x \xrightarrow{x=1} 21/4 = 5(1)^2 + 7(1) \Rightarrow 21/4 = 12 \quad \times$$

$$\triangle ABC : AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 1^2 + 2^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$$

در نتیجه:

$$\triangle ACD : AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow (\sqrt{5})^2 + 1^2 = AD^2 \Rightarrow AD^2 = 6 \Rightarrow AD = \sqrt{6}$$

پس:

$$\triangle ADE : AE^2 = AD^2 + DE^2 \Rightarrow AE^2 = 6 + 9 = 15 \Rightarrow AE = \sqrt{15}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت مربع ABCD برابر با $3 \times 3 = 9$ سانتی‌متر مربع و مساحت مثلث MDC برابراست با $\frac{1}{3}$ مساحت مربع، یعنی ۳ سانتی‌متر مربع. از طرفی می‌توانیم مساحت مثلث MDC را به این شکل به دستبیاوریم $\frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{DM}$ که برابر است با $\frac{3}{2} \times \overline{DM}$ ، یعنی $\frac{3}{2} \times \overline{DM} = 3$ ، پس $\overline{DM} = 2$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مساحت مثلث LMN را در ۳ گام به دست می‌آوریم:

گام ۱: سه مثلث ANL، CNM، و MLB با هم هم‌نهشت‌اند و مثلث LMN متساوی‌الاضلاع است.

گام ۲: اگر روی ضلع‌های مثلث ABC، نقطه‌های R، S، و T را طوری انتخاب کنیم که $BT = BL$ ، $CM = CR$ و $AS = AN$ ، نقطه‌های T، S، و R وسط پاره‌خط‌های MB، AL، و CN خواهند بود.

گام ۳: مساحت هر یک از مثلث‌های ASN، LBT، و CRM، $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است. همچنین مساحت هر یک از مثلث‌های RNM، MTL، و NSL هم برابر مساحت مثلث‌های قبلی و $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است، یعنی ۴ سانتی‌متر

مربع. پس مساحت مثلث MNL برابر است با:

$$۳۶ - ۴ \times ۴ = ۱۲$$

گام‌های ۱ تا ۳ به دلایل زیر درست‌اند:

گام ۱: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است. پس $۱۸۰^\circ + \widehat{B} + \widehat{M}_1 = ۱۸۰^\circ + ۹۰^\circ$ ، یعنی $۶۰^\circ + \widehat{M}_1 = ۹۰^\circ$ ، بنابراین $\widehat{M}_1 = ۳۰^\circ$. به همین صورت می‌توانیم ثابت کنیم $\widehat{N}_1 = ۳۰^\circ$ و $\widehat{L}_1 = ۳۰^\circ$. پس $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 = \widehat{L}_2 = ۶۰^\circ$. بنابراین مثلث NML سه زاویه ۶۰° دارد که نتیجه می‌دهد این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

$$\left. \begin{array}{l} ML = LN \\ \widehat{L} = \widehat{N} = ۹۰^\circ \\ M_1 = \widehat{L}_1 = ۳۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow MBL \cong NLA \quad \text{داریم:}$$

به‌طور مشابه، هم‌نهشتی این دو مثلث با مثلث CNM هم ثابت می‌شود.

گام ۲: می‌دانیم $BT = BL$ ، پس مثلث LTB متساوی‌الساقین است، بنابراین $\widehat{L}_1 = \widehat{T}_1$ از طرفی

$$\widehat{L}_1 + \widehat{T}_1 = ۱۲۰^\circ \quad \text{پس } \widehat{L}_1 = \widehat{T}_1 = ۶۰^\circ$$

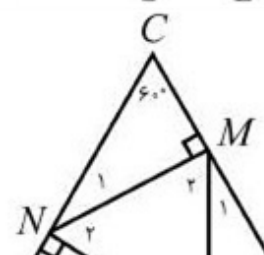
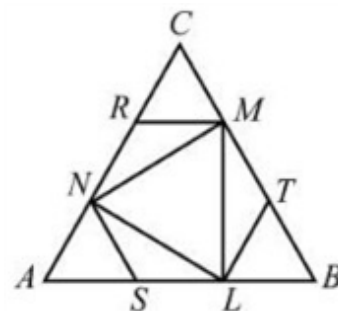
بنابراین مثلث LTB متساوی‌الاضلاع است. $\widehat{L}_2 = ۹۰^\circ - \widehat{L}_1 = ۳۰^\circ$ ، پس مثلث MTL هم متساوی‌الساقین است و $MT = TL$ ، پس $MT = TL$ و $TL = TB$ ، بنابراین $MT = TB$ و T وسط پاره‌خط MB است. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که R وسط CN و S وسط AL است.

گام ۳: در گام‌های قبل ثابت شد پاره‌خط‌های CM، MT، TB، BL، LS، SA، AN، NR و RC با هم برابرند. پس می‌توانیم مثلث ABC را مانند شکل زیر تقسیم کنیم که هر ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابرند. پس مساحت هر یک، $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است.

اگر در مثلث LMB، ارتفاع LH را رسم کنیم، مساحت مثلث MLT برابر است با:

$$\text{مساحت مثلث MLT} = \frac{1}{2} \times \overline{LH} \times \overline{MT} = \frac{1}{2} \times \overline{LH} \times \overline{TB} = \text{مساحت مثلث TLB}$$

پس مساحت مثلث MLT هم $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است.



پاسخنامه کلیدی

۲۴	۱	۲	۳	۴	
۲۵	۱	۲	۳	۴	
۲۶	۱	۲	۳	۴	
۲۷	۱	۲	۳	۴	
۲۸	۱	۲	۳	۴	
۲۹	۱	۲	۳	۴	۵
۳۰	۱	۲	۳	۴	۵

