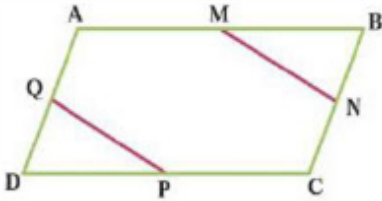
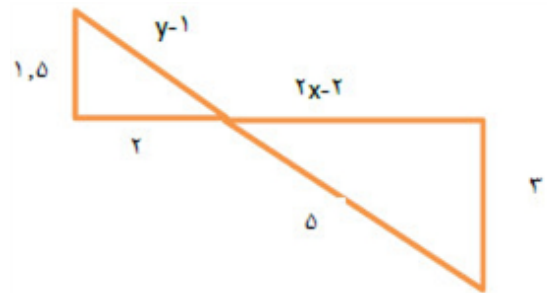


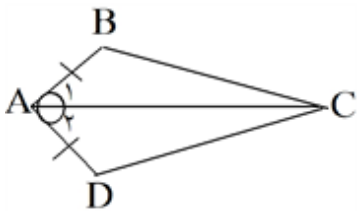
۱ در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است. اگر M ، N ، P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع باشند، ثابت کنید:
 $MN = PQ$



۲ دو مثلث متشابهند. مقادیر x و y را به دست آورید.

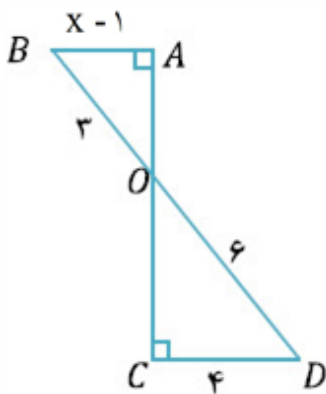


۳ در شکل زیر پاره خط \overline{AC} نیمساز زاویه \hat{A} است و اضلاع \overline{AB} و \overline{AD} برابرند. ثابت کنید $\overline{BC} = \overline{DC}$.

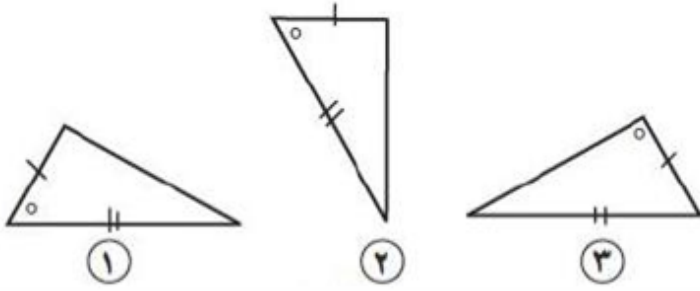


۴ مثلث ABC به ضلع های ۵، ۴، ۶ سانتی متر با مثلث MNO به ترتیب با ضلع های ۱۰، $3X - 1$ ، $5Y + 2$ سانتی متر با هم متشابه اند. مقدار X ، Y پیدا کنید.

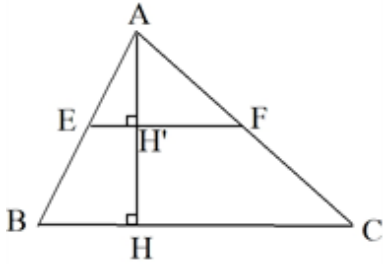
۵ در شکل مقابل دو مثلث AOB و DOC متشابه هستند. مقدار x را به دست آورید. (۱ نمره)



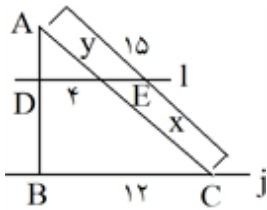
۶ مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و حالت هم‌نهشتی آن‌ها را بیان نمایید.



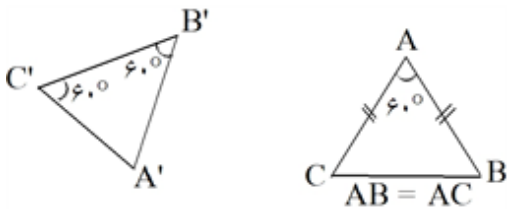
۷ در شکل زیر، $EF \parallel BC$. اگر نسبت مساحت‌های مثلث‌های AEF و ABC برابر $\frac{1}{6}$ باشد، نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.



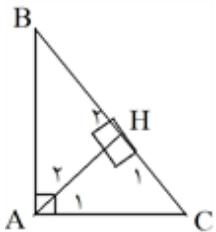
۸ در شکل زیر، خط l با خط j موازی است. طول‌های x و y را بیابید.



۹ آیا دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند؟



۱۰ نشان دهید در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

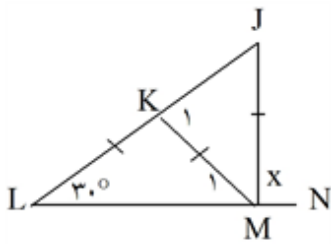


۱۱ اگر طول ضلع هشت‌ضلعی ۲ سانتی‌متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید.

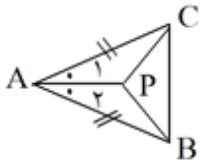
۱۲ طول قطر مستطیلی را به دست آورید که طول ضلع‌های آن $4r$ و $7r$ باشد.

۱۳ با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۴ در شکل زیر، مقدار x را تعیین کنید.



۱۵ دلیل متساوی الساقین بودن مثلث PBC را بنویسید.



۱۶ در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه اضلاع این مثلث سه عدد طبیعی متوالی باشند، اندازه هر یک از اضلاع آن چه قدر است؟

۴ ۷ و ۸ و ۹

۳ ۵ و ۶ و ۷

۲ ۳ و ۴ و ۵

۱ ۲ و ۳ و ۴

۱۷ کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

۱ هر دو مثلث که مساحت‌های برابر دارند، هم‌نهشت هستند.

۲ ارتفاع‌های هر مثلث همواره داخل مثلث هستند.

۳ محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث همیشه داخل مثلث است.

۴ در یک مثلث با دو زاویه نابرابر، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

۱۸ در شکل زیر BC با CE برابر است. دو مثلث ABC و CDE بنا بر چند تا از حالت‌های زیر هم‌نهشت هستند؟

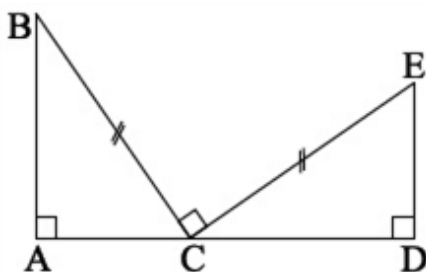
الف) وتر و یک زاویه تند

ب) وتر و یک ضلع

ج) دو زاویه و ضلع بین

د) دو ضلع و زاویه بین

ه) سه زاویه



۴ هم‌نهشت نیستند.

۳ سه حالت

۲ دو حالت

۱ یک حالت

«لوزی‌ها، دارای اضلاع برابر هستند. برخی از متوازی‌الاضلاع‌ها، لوزی هستند. بنابراین برخی از متوازی‌الاضلاع‌ها، ضلع‌های برابر دارند.» کدام‌یک از موارد زیر، از نظر نحوه استدلال، شبیه استدلال فوق است؟

- ۱) مستطیل‌ها، دارای زاویه‌های قائمه هستند. مستطیل‌ها، متوازی‌الاضلاع هستند. بنابراین بعضی از متوازی‌الاضلاع‌ها زاویه‌های قائمه دارند.
- ۲) فقط میزها از چوب ساخته شده‌اند. بعضی از وسایل منزل با چوب ساخته می‌شوند. بنابراین بعضی از وسایل منزل، میز هستند.
- ۳) فقط دانش‌آموزان قد بلند، مستعد بسکتبال هستند. بعضی از دانش‌آموزان، قد بلند هستند. بنابراین بعضی از دانش‌آموزان، مستعد بسکتبال هستند.
- ۴) فقط ماهی‌ها می‌توانند شنا کنند. بعضی خزندگان نمی‌توانند شنا کنند. بنابراین، بعضی ماهی‌ها، خزنده هستند.

نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر محیط یکی از این مربع‌ها در نقشه‌ای به مقیاس $\frac{1}{10}$ برابر ۶ واحد باشد، مجموع محیط‌های ممکن برای مربع دیگر چه قدر است؟

- ۱) ۱۲۰
- ۲) ۱۲۵
- ۳) ۱۳۰
- ۴) ۱۳۵

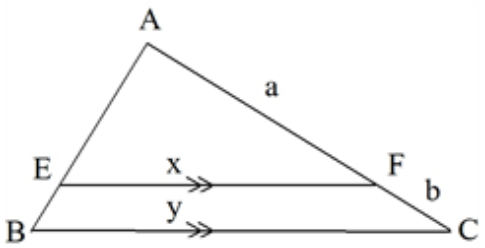
۲۱) برای کدام‌یک از گزینه‌های زیر، نمی‌توانیم مثال نقض بیاوریم؟

- ۱) محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث همیشه درون یا بیرون مثلث قرار دارد.
- ۲) دو مثلث که مساحت مساوی داشته باشند، هم‌نهشت هستند.
- ۳) در یک مثلث، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.
- ۴) چهارضلعی که قطرهای آن برابر باشد، مستطیل است.

۲۲) در مثلث ABC داریم، $AB = ۱۶$ و $BC = ۱۲$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$ ، آن‌گاه مساحت مثلث کدام است؟

- ۱) ۹۶
- ۲) ۴۸
- ۳) ۳۶
- ۴) ۶۴

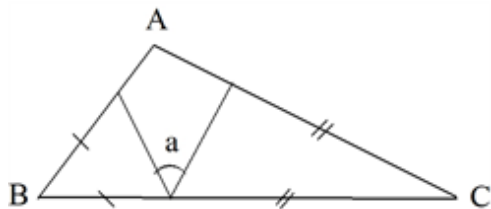
۲۳) در شکل مقابل نسبت $\frac{a}{b}$ بر حسب x و y کدام است؟



- ۱) $\frac{x}{y}$
- ۲) $\frac{y-x}{y}$
- ۳) $\frac{x}{y-x}$
- ۴) $\frac{y}{y-x}$

۲۴

در شکل مقابل زاویه $A = 112^\circ$ و دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. زاویه a چند درجه است؟



۳۸ (۴)

۳۶ (۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

۲۵ دو لوزی متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{4}{5}$ است. اگر ضلع لوزی کوچک ۱۲ سانتی‌متر باشد، ضلع لوزی بزرگتر کدام

است؟

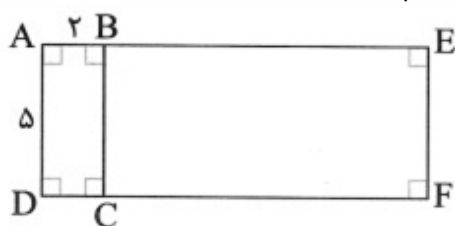
۹/۶ (۴)

۷/۵ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱)

۲۶ اگر دو مستطیل ABCD و AEFD متشابه باشند، اندازه‌ی ضلع AE برابر با کدام گزینه است؟



۱۲/۵ (۴)

۸/۵ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

۲۷ کدام گزینه درست است؟

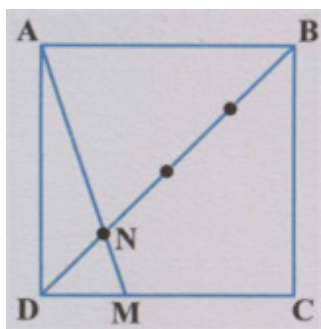
(۲) هر دو مربع دلخواه متشابهند.

(۱) هر دو مثلث قائم‌الزاویه دلخواه متشابهند.

(۴) هیچ‌کدام

(۳) هر دو مستطیل دلخواه متشابهند.

۲۸ در شکل مقابل، قطر مربع به ۴ بخش مساوی به اندازه $\sqrt{2}$ تقسیم شده است. اگر مثلث‌های DMN و ABN متشابه باشند، محیط مثلث ABN چند برابر مثلث DMN است؟



۹ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{2}$ (۱)

۲۹ اگر مقیاس نقشه‌ای ۷ به ۱۰۰۰۰ و فاصله دو نقطه در نقشه ۲۱ سانتی‌متر باشد، فاصله این دو نقطه در واقعیت چند متر است؟

۲۱۰۰ (۴)

۳۰۰۰ (۳)

۷۰۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

۱ $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD مستطیل است}$

۲ $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ضلع‌های ABCD با هم برابر نیستند}$

۳ $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ABCD مربع نیست}$

۴ $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر لوزی قطر‌ها بر هم عمودند.} \\ \text{چهارضلعی ABCD لوزی نیست} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{قطرهای ABCD بر هم عمود نیستند}$

$$\frac{3}{1/5} = \frac{5}{y-1} = \frac{2x-2}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{5}{y-1} \Rightarrow 2y-2=5 \Rightarrow 2y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2x-2}{2} \Rightarrow 2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \\ \overline{AC} = \overline{AC} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ADC \cong \triangle ABC \Rightarrow \overline{BC} = \overline{DC}$$

$$\frac{5}{10} \times \frac{4}{3x-1} = 15x-5=40=15x=+5+40=x=\frac{45}{15}=3$$

$$\frac{5}{10} \times \frac{6}{5y+2} = 25y+10=60=25y=-10+60=y=\frac{50}{25}=2$$

$$\frac{5}{10}, \frac{4}{8}, \frac{6}{12}$$

نسبت تشابه = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{6} = \frac{x-1}{4} \rightarrow 6x-6=12 \rightarrow 6x=18 \rightarrow x=\frac{18}{6} \rightarrow x=3$$

۶ مثلث‌های ۱ و ۲ به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین، هم‌نهشت‌اند.

۷ در دو مثلث متشابه نسبت مساحتها با توان دوم نسبت ارتفاعها برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{B} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AH}{AH'} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \left(\frac{AH}{AH'} \right)^2 \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$L \parallel j \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{4}{12} \Rightarrow y=5$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=15 \\ y=5 \end{array} \right\} \Rightarrow x=10$$

۹ هر دو مثلث، متساوی الاضلاع هستند و متشابه می‌باشند زیرا زوایای نظیر با هم مساویند.

۱۰ دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ را در نظر می‌گیریم.

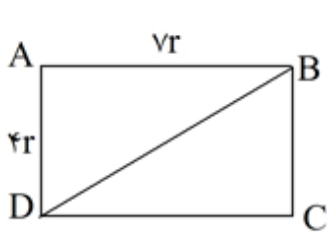
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{C} + \widehat{A}_1 = 90^\circ \\ \widehat{A}_2 + \widehat{A}_1 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_2 \left. \begin{array}{l} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

پس ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو نقطه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

۱۱ مطابق شکل چهار مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با هم در اطراف این شکل وجود دارند به طوری که وتر آنها برابر ۲ می‌باشد.

$$x^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$x + 2 + x \Rightarrow \text{ضلع مربع} = 2\sqrt{2} + 2$$



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2$$

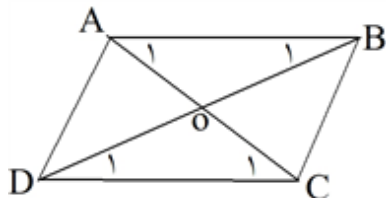
$$BD^2 = 4r^2 + 16r^2$$

$$BD^2 = 20r^2$$

$$BD = \sqrt{20}r$$

۱۲ فرض کنیم O نقطه‌ی تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع ABCD باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \\ \left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \\ AB = CD \text{ اضلاع مقابل متوازی الاضلاع مساویند} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle DOC \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$



بنابراین در متوازی الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

$$MK = KL \Rightarrow \widehat{M}_1 = 30^\circ$$

$$\triangle KML \text{ مثلث خارجی زاویه } \widehat{K}_1 = 30 + 30 \Rightarrow \widehat{K}_1 = 60^\circ$$

$$MK = MJ \Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{J} \Rightarrow \widehat{J} = 60^\circ$$

$$\triangle LMJ \text{ مثلث خارجی زاویه } x = L + J \Rightarrow x = 30 + 60 \Rightarrow x = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} AP = AP \\ AC = AB \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle APC \cong \triangle APB \Rightarrow PB = PC$$

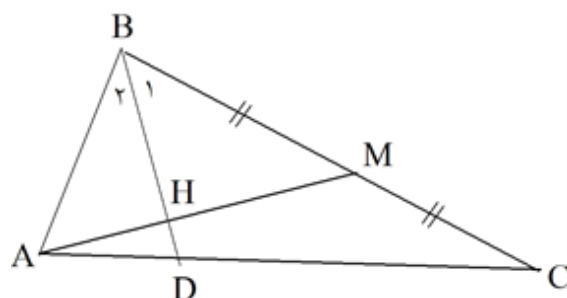
۱۴ پس مثلث PBC متساوی‌الساقین است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. BD نیمساز زاویه B و AM میانه وارد بر BC است. چون $BD \perp AM$ عمود است، پس در مثلث ABM ارتفاع و نیمساز بر هم منطبقند. پس مثلث AMB متساوی الساقین است و داریم:

$$BM = AB, BC = 2BM \Rightarrow BC = 2AB$$

بنابراین اگر $x - 1, x, x + 1$ اضلاع مثلث باشند، اندازه یکی از اضلاع دو برابر دیگری است و این فقط در گزینه ۱ صدق می‌کند.

$$x + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow x = 3$$



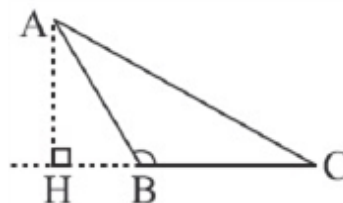
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

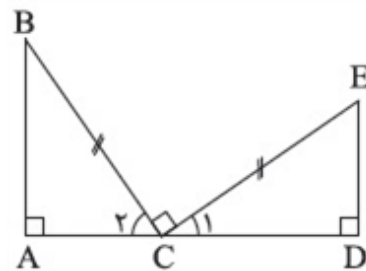
(۱) دو مثلث در نظر بگیرید که ارتفاع و قاعده اولی به ترتیب ۲ و ۶ و ارتفاع و قاعده دومی به ترتیب ۶ و ۲ باشد. در این صورت دارای مساحت‌های یکسان هستند ولی هم‌نهشت نیستند.

(۲) مثلث ABC دارای یک زاویه باز است و ارتفاع آن خارج قرار گرفته است. (مطابق شکل بالا)

(۳) محل هم‌مرسی عمود منصف‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه به ترتیب وسط وتر و خارج مثلث است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



این دو مثلث بنابر حالت وتر و یک زاویه تند و دو زاویه ضلع بین با یک‌دیگر هم‌نهشت‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \\ \hat{C}_1 + \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{E} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} BC = CE \\ \hat{C}_2 = \hat{E} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \triangle ABC \cong \triangle CDE$$

بنابراین: $\hat{C}_1 = \hat{B}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_2 = \hat{E} \\ BC = CE \\ \hat{C}_1 = \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle CDE$$

اضلاع برابر \rightarrow برخی متوازی الاضلاع \Rightarrow لوزی \rightarrow برخی متوازی الاضلاع / اضلاع برابر \rightarrow لوزی
 مستعد بسکتبال \rightarrow برخی دانش آموزان \Rightarrow قد بلند \rightarrow برخی دانش آموزان / مستعد بسکتبال \rightarrow دانش آموز قد بلند
 مشاهده می‌کنیم که این دو استدلال کاملاً مشابه هستند.

$$\frac{\text{محیط در نقشه}}{\text{محیط واقعی}} = \frac{1}{10} = \frac{6}{\text{محیط واقعی}} \Rightarrow \text{محیط واقعی} = 60 \text{ (بزرگ‌تر یا کوچک‌تر)}$$

توجه: نسبت محیط‌های دو شکل متشابه، با نسبت تشابه دو شکل برابر است.

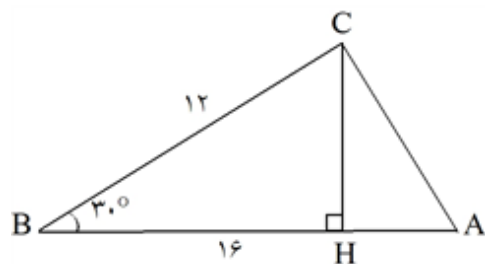
$$\text{محیط بزرگ‌تر} = 90 \Rightarrow \frac{60}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 90$$

$$\text{محیط کوچک‌تر} = 40 \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 40$$

$$\text{مجموع محیط‌های ممکن} : 90 + 40 = 130$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که فقط گزینه ۳ عبارت درستی را بیان می‌کند، پس مثال نقض ندارد.

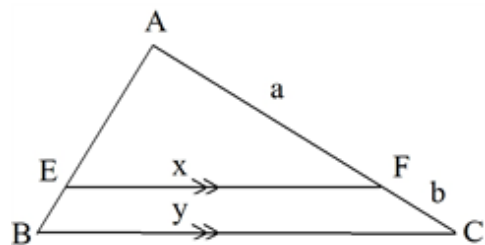
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{H} = 90^\circ, \widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow CH = 6$$

$$S_{ABC} = \frac{6 \times 16}{2} = 48$$

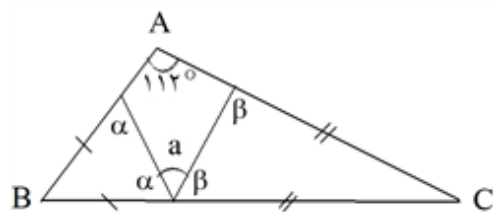
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{AF}{AC - AF} = \frac{x}{y - x} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y - x}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 68^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ - 68^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 146^\circ$$

$$a = 180 - 146 = 34^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 15$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو مستطیل متشابه هستند، نسبت تشابه طول و عرض مستطیل را می‌نویسیم:

$$\frac{(AD) \text{ طول مستطیل کوچک}}{(AB) \text{ عرض مستطیل کوچک}} = \frac{(AE) \text{ طول مستطیل بزرگ}}{(AD) \text{ عرض مستطیل بزرگ}}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{5}{AE} \Rightarrow AE = \frac{5 \times 5}{2} = 12.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که مثلث‌های ABN و DMN متشابه هستند، نسبت تشابه آن‌ها برابر با نسبت اضلاع آن‌ها است، پس داریم:

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{NB}{DN} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

از طرفی می‌دانیم نسبت محیط دو شکل متشابه برابر با نسبت تشابه آن‌ها است، پس داریم:

$$\frac{\text{محیط } ABN}{\text{محیط } DMN} = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به مقیاس داده شده، هر ۷ سانتی‌متر در نقشه برابر ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر در واقعیت می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{7}{10000} = \frac{21}{\boxed{30000 \text{ cm}}} = 300 \text{ m}$$

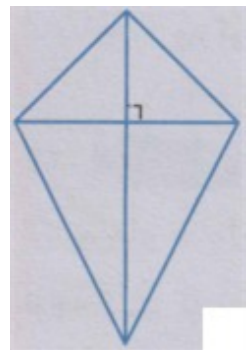
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به استدلال‌های بیان شده در هر گزینه خواهیم داشت:

گزینه «۱»: $ABCD$ می‌تواند مربع، لوزی یا یک متوازی‌الاضلاع دلخواه باشد، پس این استدلال نادرست است.

گزینه «۲»: $ABCD$ مربع نیست، اما می‌تواند لوزی باشد، آن‌گاه چهارتا ضلع آن با هم برابرند پس این استدلال نیز نادرست است.

گزینه «۳»: وقتی در چهارضلعی $ABCD$ ضلع‌ها برابر نیستند، بنابراین این چهارضلعی مربع نیست، پس این استدلال درست است.

گزینه «۴»: چهارضلعی $ABCD$ می‌تواند لوزی نباشد، اما قطرهایش بر هم عمود باشد مانند شکل مقابل. پس این استدلال نیز نادرست است.



۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴