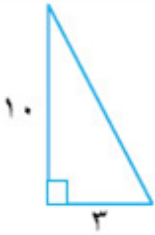


۱ حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ سانتی‌متر و ارتفاع هرم ۹ سانتی‌متر باشد.

۲ حجم و مساحت کره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر را حساب کنید. (۱ نمره)

۳ الف) مثلث قائم‌الزاویه مقابل را حول ضلع ۱۰ سانتی‌متری دوران می‌دهیم. حجم مخروط حاصل از این دوران را پیدا کنید. (۱ نمره)



ب) از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن چه شکل هندسی به وجود می‌آید؟

دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر هستند. به ۴ سؤال بعدی پاسخ دهید.

۴ مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.

۵ مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.

۶ حجم هر یک را به دست آورید.

۷ حجم هر یک را به دست آورید.

۸ اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

۹ اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

۱۰ اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۱۱ اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۱۲ حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر:

۱۳ حجم کره را محاسبه کنید.

۱۴ اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۱۵ یک چهار وجهی را که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد در نظر بگیرید، حجم آن را بر حسب a به دست آورید. اگر $a = \frac{4}{5}$ cm حجم چهاروجهی چقدر می‌شود؟ (در این چهار وجهی ارتفاع از محل تقاطع نیسمازهای وجه مقابل می‌گذرد.)

۱۶ $h' = 25$ cm, $a = 14$ cm

۱۷ برای حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر، عبارتی بر حسب a و b پیدا کنید.

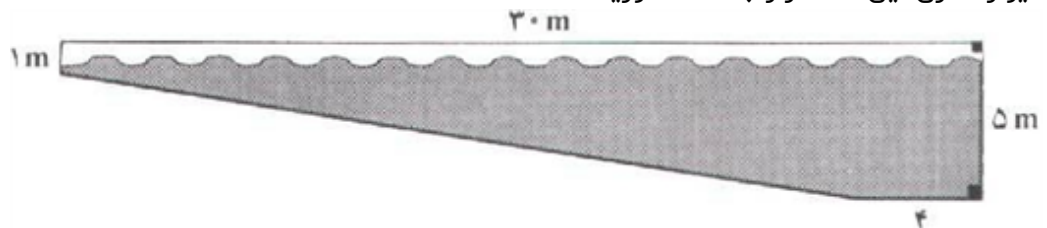
۱۸ برای حجم مخروط عبارتی بر حسب a و b پیدا کنید.

۱۹ طول یکی از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{4}{5}$ دیگری است. مساحت مثلث 320 سانتی‌متر مربع است. طول اضلاع زاویه قائمه را بیابید.

۲۰ نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای 2 به 3 است. اگر مساحت مثلث 27 باشد، طول وتر آن چقدر است؟

۲۱ می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل با طول 9 متر و عرض 6 متر را با کاشی‌های مربع شکلی به ضلع $\frac{1}{5}$ متر بپوشانیم. اگر قیمت هر کاشی 350 تومان باشد، هزینه‌ی این کار چقدر خواهد بود؟

۲۲ طول یک استخر شنا 30 متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا 5 متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به دست آورید.



۲۳ چه رابطه‌ای بین مساحت مثلث PNN' و مساحت مثلث PQM وجود دارد؟

۲۴ در داخل کره‌ای به شعاع ۶ واحد، بزرگ‌ترین استوانه ممکن به ارتفاع ۸ واحد قرار دارد. حجم این استوانه چند واحد مکعب است؟

۱۶۰π (۴)

۱۴۴π (۳)

۱۳۲π (۲)

۱۲۰π (۱)

۲۵ عدد اندازه‌ی حجم یک کره، ۳ برابر عدد اندازه‌ی مساحت کره است. مساحت دایره عظیمه این کره کدام است؟

۸۱π (۴)

۶۴π (۳)

۴۹π (۲)

۳۶π (۱)

۲۶ حجم مخروط دواری سه برابر حجم مخروط دوار دیگری است. اگر شعاع قاعده مخروط با حجم بیش‌تر، نصف شعاع قاعده مخروط دیگر باشد، نسبت ارتفاع‌های دو مخروط کدام است؟

$\frac{۴}{۳}$ (۴)

$\frac{۹}{۴}$ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)

۲۷ مخروط دواری به ارتفاع ۱۲ واحد را با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصله ۴ واحد از آن قطع می‌دهیم، نسبت مساحت‌های جانبی دو قسمت جدا شده کدام است؟

$\frac{۴}{۵}$ (۴)

$\frac{۳}{۴}$ (۳)

$\frac{۲}{۳}$ (۲)

$\frac{۱}{۲}$ (۱)

۲۸ کدام جمله درست است؟

۱ از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، مخروط به وجود می‌آید.

۲ از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع حول یک ضلع آن، دو مخروط مساوی به وجود می‌آیند.

۳ از دوران ربع دایره حول شعاع آن، مخروط به وجود می‌آید.

۴ از دوران مستطیل حول عرض آن، هرم به وجود می‌آید.

۲۹ مثلثی به ابعاد ۳، ۴، ۵ را در نظر بگیرید. حجم شکل حاصل از دوران مثلث حول ضلع ۵، کدام است؟

$۱۱/۶π$ (۴)

$۱۰/۲π$ (۳)

$۴/۸π$ (۲)

$۹/۶π$ (۱)

۳۰ حجم یک مخروط با ارتفاع ۸ برابر $۲۴π$ است. شعاع قاعده مخروط برابر است با:

۲ (۴)

$\frac{۱}{۲}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 9 = 48$$

نمره ۰/۲۵ نمره ۰/۲۵ نمره ۰/۵

$$S = 4\pi r^2 = 4 \times \pi \times 9 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 36\pi \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3}sh \rightarrow V = \frac{\sqrt{3} \times 3 \times 3 / 14 \times 10}{\sqrt{3}} = 94/20$$

الف (۳)

ب) کره

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(1)^2 = 4\pi$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(1)^2 = 4\pi$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

$$\text{حجم کره اول} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{حجم کره دوم} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\text{حجم کره اول} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{حجم کره دوم} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$$

۸) مساحت کره به شعاع R را با مساحت کره به شعاع $2R$ مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\text{مساحت کره به شعاع } 2R}{\text{مساحت کره به شعاع } R} = \frac{4\pi(2R)^2}{4\pi R^2} = \frac{16\pi R^2}{4\pi R^2} = 4$$

پس اگر شعاع کره را دو برابر کنیم، مساحت آن چهار برابر می‌شود.

۹) مساحت کره به شعاع R را با مساحت کره به شعاع $2R$ مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\text{مساحت کره به شعاع } 2R}{\text{مساحت کره به شعاع } R} = \frac{4\pi(2R)^3}{4\pi R^3} = \frac{16\pi R^3}{4\pi R^3} = 4$$

پس اگر شعاع کره را دو برابر کنیم، مساحت آن چهار برابر می‌شود.

۱۰ حجم کره به شعاع R را با حجم کره به شعاع 2R مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\text{حجم کره به شعاع } {}^2R}{\text{حجم کره به شعاع } R} = \frac{\frac{4}{3}\pi({}^2R)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8$$

پس اگر شعاع کره را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

۱۱ حجم کره به شعاع R را با حجم کره به شعاع 2R مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\text{حجم کره به شعاع } {}^2R}{\text{حجم کره به شعاع } R} = \frac{\frac{4}{3}\pi({}^2R)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8$$

پس اگر شعاع کره را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

۱۲ پس شعاع قاعده مخروط 2a و ارتفاع مخروط 2b می‌باشد.

$$\text{حجم} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi({}^2a)^2({}^2b) = \frac{8}{3}\pi a^2 b$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi({}^2r)^3 = 8r^3\pi$$

۱۴ حجم کره به شعاع R را با حجم کره به شعاع 2R مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{\text{حجم کره به شعاع } {}^2R}{\text{حجم کره به شعاع } R} = \frac{\frac{4}{3}\pi({}^2R)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 8$$

پس اگر شعاع کره را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

OH ارتفاع این چهاروجهی می‌باشد. و AH مساوی $\frac{2}{3}$ ارتفاع قاعده است. چون قاعده مثلث، مثلث متساوی‌الاضلاع است

پس

$$AH = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$
 داریم:

$$\triangle OAH : OH^2 = OA^2 - AH^2$$

$$OH^2 = a^2 - \frac{1}{3} a^2 = \frac{2}{3} a^2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

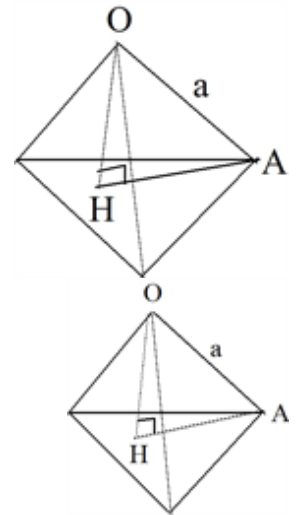
ارتفاع چهاروجهی

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{1}{3} sh$$

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a \right) = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{9}{2} \right)^3 = \frac{243\sqrt{2}}{32}$$

اگر $a = 4/5$ باشد داریم:



۱۶ در شکل HH' مساوی نصف ضلع مربع می‌باشد پس $HH' = \frac{a}{2} = 2$.

$$\triangle OHH' : h^2 = h'^2 + HH'^2 \Rightarrow 25^2 = h'^2 + 2^2 \Rightarrow h'^2 = 576 \Rightarrow h' = 24 \text{ cm}$$

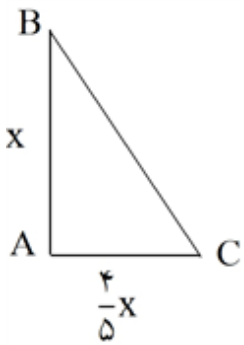
$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (14^2) (24) = 1568 \text{ cm}^3$$

۱۷ پس شعاع قاعده مخروط $2a$ و ارتفاع مخروط $2b$ می‌باشد.

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (2a)^2 (2b) = \frac{8}{3} \pi a^2 b$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

۱۹ فرض کنیم $AB = x$ و $AC = \frac{4}{5}x$ باشند داریم:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC$$

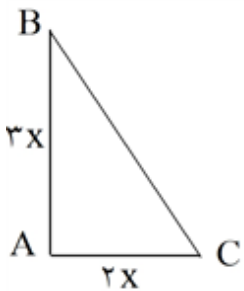
$$320 = \frac{1}{2} (x) \left(\frac{4}{5} x \right)$$

$$x^2 = 800$$

$$x = 20\sqrt{2}$$

پس $AB = 20\sqrt{2}$ cm و $AC = 16\sqrt{2}$ cm می‌باشند.

۲۰ فرض کنیم $AC = 2x$ و $AB = 3x$ باشند داریم:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC$$

$$27 = \frac{1}{2} (2x)(3x)$$

$$\begin{cases} AB = 9, AC = 6 \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ BC^2 = 9^2 + 6^2 = 117 \\ BC = \sqrt{117} \end{cases}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

۲۱ ابتدا تعداد کاشی‌ها را به دست می‌آوریم برای کار مساحت کف استخر را به مساحت هر یک کاشی تقسیم می‌کنیم.

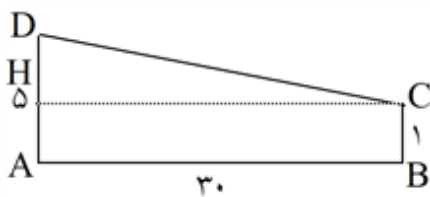
$$\text{مساحت کف استخر} = 9 \times 6 = 54$$

$$\text{مساحت یک کاشی} = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$\text{تعداد کاشیها} = \frac{54}{0.25} = 216$$

$$\text{هزینه} = 216 \times 350 = 75600$$

۲۲ شکل دیواره استخر به صورت مقابل است اگر ارتفاع CH را رسم کنیم آنگاه $AH = BC = 1$ و $DH = 4$ و $CH = 30$ خواهد بود.

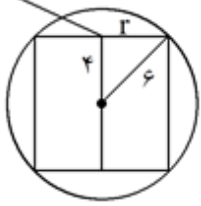


$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} CH (BC + AD) = \frac{1}{2} (30)(1 + 5) = 90$$

۲۳ ارتفاع PH مثلثهای PNN' و PQM می‌باشد.

$$\frac{S_{PNN'}}{S_{PQM}} = \frac{\frac{1}{2} PH \times NN'}{\frac{1}{2} PH \times QM} = \frac{NN'}{QM} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{PQM} = 2 S_{PNN'}$$

شعاع استوانه



$$r^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

$$V = \pi(2\sqrt{5})^2 \times 8 = 160\pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دایره عظیمه هر کره دایره‌ای است که شعاع آن با شعاع کره برابر می‌باشد و مرکز آن نیز بر مرکز کره منطبق می‌باشد. ۲۵

$$v = 3S \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 3 \times 4\pi R^2 \Rightarrow R = 9 \Rightarrow S_{\text{دایره عظیمه}} = \pi R^2 = 81\pi$$

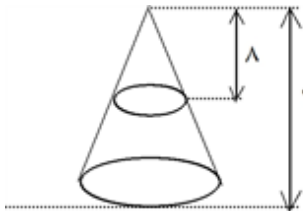
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم حجم مخروط دوار به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر است با، مساحت قاعده آن در ثلث ارتفاع. یعنی $v = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ و طبق فرض سؤال داریم $R_1 = \frac{1}{2}R_2$ و $V_1 = 3V_2$ با جایگذاری داریم: ۲۶

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 \times h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 \times h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow 3 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{R_2}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4} \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 12$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یادآوری: ۱) هرگاه در مخروطی، صفحه‌ای موازی قاعده رسم کنیم، مخروط کوچک‌تری که ایجاد می‌شود با مخروط متشابه است. ۲) در دو مخروط متشابه، نسبت مساحت‌های جانبی با مربع ارتفاع مخروط‌ها برابر است. ۲۷

$$\frac{S}{S'} = \left[\frac{h}{h'}\right]^2 = \left[\frac{8}{12}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

و نسبت مساحت‌های جانبی دو قسمت ایجاد شده (مخروط کوچک‌تر و مخروط ناقص ایجاد شده) برابر است با:

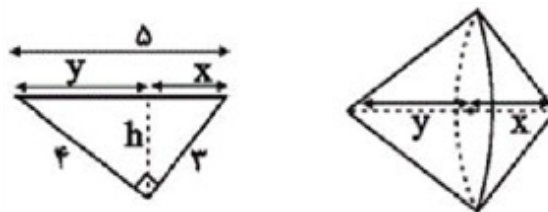


$$\frac{S}{S'} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S}{S' - S} = \frac{4}{9 - 4} = \frac{4}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است زیرا طول اضلاع آن در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کند. اگر این مثلث را حول وتر دوران بدهیم، دو مخروط به وجود می‌آید که شعاع قاعده‌ی این دو مخروط برابر با ارتفاع وارد بر وتر، یعنی $2/4$ است. ارتفاع این دو مخروط را مطابق شکل x و y می‌گیریم. برای محاسبه‌ی ارتفاع وارد بر وتر داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{h \times 5}{2} \Rightarrow h = \frac{3 \times 4}{5} = 2/4$$



حجم شکر حاصل از دوران، برابر با مجموع حجم‌های دو مخروط است.

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 x + \frac{1}{3} \pi h^2 y = \frac{1}{3} \pi h^2 (x + y) \xrightarrow[h=2/4]{x+y=5} V = \frac{1}{3} \pi (2/4)^2 5 \Rightarrow V = 9/6 \pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times 8 = 24 \pi$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} r^2 = 24 \Rightarrow 8r^2 = 72 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴